El teorema del *Mengenlehreuhr*

Todo número entero N, $0 \leq N \leq 1440$, *se escribe de manera única de la forma*

$$N = 300x_1 + 60x_2 + 5x_3 + x_4,$$

donde $0 \leq x_1, x_2, x_4 \leq 4$ *y* $0 \leq x_3 \leq 11$.

Demostración:

1) Existencia

Sea N un entero $0 \leq N \leq 1440$. Si lo dividimos entre 300, obtenemos:

$$N = 300x_1 + r_1, \text{ donde } 0 \leq r_1 < 300.$$

Como $0 \leq N \leq 1440$, se deduce que $-300 < N - r_1 \leq 1440$, y entonces:

$$-1 < x_1 = \frac{N - r_1}{300} \leq \frac{1440}{300} = 4,8.$$

Y como x_1 es un entero, se deduce que $0 \leq x_1 \leq 4$.

Ahora dividimos r_1 entre 60:

$$r_1 = 60x_2 + r_2, \text{ donde } 0 \leq r_2 < 60.$$

Argumentando de manera similar a la anterior, se obtiene la desigualdad:

$$-1 < x_2 = \frac{r_1 - r_2}{60} < \frac{300}{60} = 5,$$

con lo que $0 \leq x_2 \leq 4$.

Tenemos, de momento, la expresión siguiente para N:

$$N = 300x_1 + 60x_2 + r_2, \text{ con } 0 \leq x_1, x_2 \leq 4 \text{ y } 0 \leq r_2 < 60.$$

Continuamos de este modo, y dividimos r_2 entre 5:

$$r_2 = 5x_3 + r_3, \text{ donde } 0 \leq r_3 < 5.$$

Se tiene que:

$$-1 < x_3 = \frac{r_2 - r_3}{5} < \frac{60}{5} = 12,$$

con lo que $0 \leq x_3 \leq 11$.

Finalmente, tomando $x_4 = r_3$, donde $0 \leq r_3 \leq 4$, queda la expresión

$$N = 300x_1 + 60x_2 + 5x_3 + x_4,$$

con los coeficientes como requería el enunciado del teorema.

2) Unicidad

Supongamos que N se descompone de dos maneras:

$$N = 300x_1 + 60x_2 + 5x_3 + x_4 \text{ y } N = 300y_1 + 60y_2 + 5y_3 + y_4.$$

Entonces:

$$300(x_1 - y_1) + 60(x_2 - y_2) + 5(x_3 - y_3) + (x_4 - y_4) = 0.$$

Observar que:

$$300(x_1 - y_1) + 60(x_2 - y_2) + 5(x_3 - y_3) = y_4 - x_4,$$

que es un múltiplo de 5. Como $-4 \leq y_4 - x_4 \leq 4$, para que $x_4 - y_4$ sea múltiplo de 5, debe de ser forzosamente 0.

Luego

$$300(x_1 - y_1) + 60(x_2 - y_2) + 5(x_3 - y_3) = 0,$$

es decir,

$$60(x_1 - y_1) + 12(x_2 - y_2) + (x_3 - y_3) = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$60(x_1 - y_1) + 12(x_2 - y_2) = y_3 - x_3,$$

que es múltiplo de 12. Como $-11 \leq y_3 - x_3 \leq 11$, debe ser $y_3 - x_3 = 0$, con lo que:

$$60(x_1 - y_1) + 12(x_2 - y_2) = 0,$$

es decir, $5(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = 0$, o de otro modo, $5(x_1 - y_1) = y_2 - x_2$. Como el primer miembro de esta igualdad es múltiplo de 5 y $-4 \leq y_2 - x_2 \leq 4$, es $y_2 - x_2 = 0$ y, por lo tanto, también es $x_1 = y_1$.